

SOLUÇÕES para o insolúvel

Vitoriano Ruas*

Neste artigo empenhamo-nos em mostrar como certas técnicas de resolução de CIPs – da sigla inglesa *coefficient inverse problems*, que significa *problemas de identificação de coeficientes* –, podem constituir ferramenta poderosa para a detecção do desconhecido em diversas áreas de aplicação, notadamente nas de defesa e de saúde. Isto se deve principalmente ao fato de que ela tem o condão de substituir, com vantagens, o uso de equipamentos sofisticados e dispendiosos por simulações computacionais capazes de identificar, em tempo hábil e de forma precisa, objetos no sentido amplo, cuja detecção é visada, tais como explosivos ou tumores malignos.

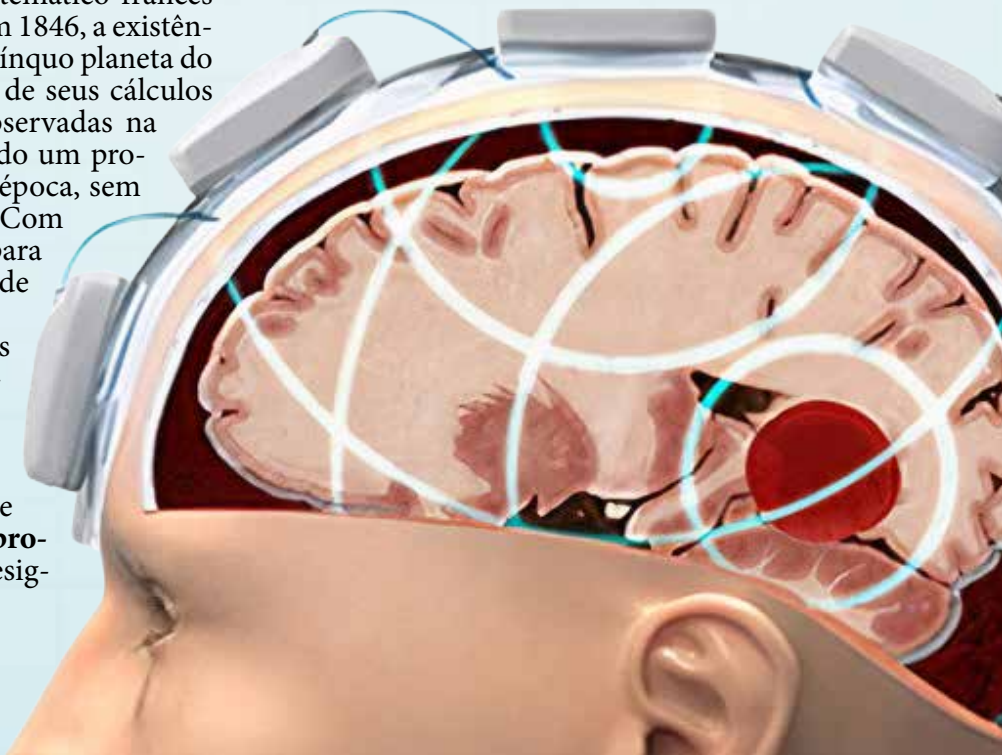
CONTEXTO CIENTÍFICO

Quando o astrônomo e matemático francês Urbain Le Verrier anunciou, em 1846, a existência e a localização do mais longínquo planeta do sistema solar, como resultado de seus cálculos baseados em perturbações observadas na órbita de Urano, havia resolvido um problema que parecia insolúvel à época, sem mais recorrer à visualização. Com efeito, esta só foi empregada para validar tão notável descoberta de Netuno algum tempo depois.

Na verdade, como muitos sábios desde a mais remota antiguidade, Le Verrier revelou o desconhecido por meio de um artifício engenhoso, que consiste em resolver, a partir de observações limitadas, um **problema inverso**. No caso, tal desig-

nação encontra seu sentido na constatação de que, caso Netuno fosse conhecido naquele tempo, teria sido possível determinar as ditas perturbações da órbita de Urano sem observá-las ou medi-las. Para tanto bastaria usar modelos matemáticos apropriados, o que seria resolver o **problema direto** subjacente.

Independentemente de sua complexidade, a resolução de problemas inversos tem-se mostrado ferramenta de fundamental importância para a aquisição de conhecimento e o avanço tecnológico em diversos setores de atividade. É o que tentaremos ilustrar no contexto particular dos modelos físico-matemáticos regidos por EDPs – abreviação usual de equações diferenciais parciais –, tendo como variáveis independentes o tempo e as que varrem o espaço multi-dimensional. Mais especificamente, conhecida



a distribuição espacial dos coeficientes físicos inerentes ao modelo, tais como os parâmetros de rigidez de um sólido submetido a carregamento ou a viscosidade e a densidade de um fluido em escoamento, podemos, em tese, determinar campos relevantes em aplicações ou projetos dos mais variados tipos em ciências e engenharia, tais como as distribuições de deformações e tensões numa estrutura ou as de velocidade e pressão numa massa líquida. Esse processo requer a resolução de um problema direto, a saber, o sistema de EDPs que modela o fenômeno em consideração. CIPs nada mais são do que problemas inversos relativos a problemas diretos do tipo que acabamos de descrever.

A resolução de um sistema de EDPs pode apresentar dificuldades consideráveis em virtude de diversos fatores, tais como a complexidade do modelo e/ou do domínio geométrico do estudo. Por isso, na imensa maioria dos casos, ela deve se dar pela via computacional, vale dizer, numérica. Contenta-se assim com aproximações supostamente confiáveis da solução exata do problema, posto que esta é inatingível em geral. Tais aproximações são determinadas por meio dos métodos numéricos para EDPs, os quais podem ser combinados a um algoritmo iterativo que proporcione a convergência para uma solução numérica aceitável. Uma comunidade científica bastante numerosa mundo afora vem se dedicando continuamente, há quase um século, ao desenvolvimento das técnicas de resolução numérica de EDPs. Na realidade, embora os grandes princípios metodológicos já sejam bem conhecidos desde os primórdios – destacando-se nessa linha o versátil método dos elementos finitos –, faz-se mister o seu aperfeiçoamento, no intuito não somente de enfrentar os desafios que novos modelos mais sofisticados possam apresentar, como também de abordar o crucial aspecto da precisão. Este último tem nele embutida a questão de limitar o volume de cálculo, e portanto a de reduzir a complexidade computacional. No entanto, no que tange ao problema inverso CIP, a tais óbices se juntam outros que os tornam (quase) insolúveis, como veremos a seguir.

CIPs NA PRÁTICA

Idealisticamente, um CIP consistiria em determinar a distribuição espácio-temporal dos coeficientes físicos presentes no modelo de EDPs em consideração, a partir do conhecimento da sua solução. Todavia, na vida real esta

última também é desconhecida. Além disso, mesmo que não fosse, o usuário se depararia com pelo menos dois obstáculos bem desanimadores, quais sejam :

- a distribuição de coeficientes físicos que resolve o problema inverso não é única; e
- pequenas perturbações na solução da EDP acarretam grandes perturbações nos coeficientes.

Em outras palavras, mesmo no caso improvável de uma solução da EDP totalmente conhecida, o CIP a ela associado é um problema mal posto no sentido matemático do termo. A questão se torna ainda mais aguda quando observado que, na prática, além da distribuição dos coeficientes, seria preciso determinar também a solução da EDP. Mas nesse caso estaríamos diante de um problema insolúvel. O que fazer então?

Se na falta dos coeficientes físicos que integram um modelo do tipo EDP não podemos conhecer sua solução em todos os pontos do domínio espacial do estudo e a qualquer tempo, por outro lado, é inviável que, no intuito de determiná-los, se meça essa solução em toda a parte e em todo o intervalo de tempo de definição da EDP por meio de um qualquer aparato. No entanto, é perfeitamente possível observar a evolução da solução através de medições, somente em uma porção bastante limitada do domínio e durante um pequeno intervalo de tempo. Mas seria isso o bastante para determinar a distribuição espacial ou espácio-temporal procurada dos coeficientes físicos, com precisão suficiente para fins práticos? A resposta é sim, se uma metodologia de conveniente desempenho for empregada.

RESOLVENDO CIPs COM USO DE OBSERVAÇÕES LIMITADAS

A fim de ilustrar como medições ou observações limitadas no espaço ou no espaço-tempo podem fornecer dados suficientes para a pertinência de um processo de resolução de CIPs, tomemos como exemplo o caso simples da deformação de uma barra elástica retilínea de seção uniforme e comprimento L , com coeficiente de rigidez p distribuído ao longo de seu comprimento, isto é, ao longo do intervalo $[0, L]$. A barra é colocada em posição vertical, fixada na sua extremidade inferior e submetida a uma tração no sentido longitudinal aplicada na extremidade oposta. A priori, o material da barra é conhecido, razão pela qual sua rigidez

nominal tem valor tabelado constante em todas as suas seções, digamos p_0 . No entanto, no âmbito de um controle de qualidade, poderíamos ser levados a determinar variações dessa rigidez ao longo da barra, as quais se traduzem por uma distribuição p que pode assumir localmente valores, críticos em termos de resistência, em vez de p_0 .

É certo que é possível medir facilmente o deslocamento d da extremidade tracionada. Mas, convenhamos, d traz um conhecimento muito limitado da solução da equação diferencial que rege a deformação da barra, vale dizer, o deslocamento longitudinal u de cada um dos seus pontos, uma vez conhecida a sua real distribuição de rigidez p . Ocorre que, por mais que isso pareça misterioso, somente o dado d poderia permitir detectar com bom grau de precisão, irregularidades da barra ao longo do seu comprimento, através da determinação do seu coeficiente de rigidez efetivo p . Propomo-nos a desvendar tal mistério na sequência.

FORMULAÇÃO DE CIPs COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A partir dos anos sessenta surgiram trabalhos importantes para permitir uma resolução satisfatória de problemas inversos. O enfoque mais adotado foi de designar como solução aquela grandeza que mais se aproximasse do ideal desejado, respeitados os critérios intrínsecos que ela deve satisfazer. Expresso de outra forma, trata-se de resolver um problema de otimização com restrições. Nesse âmbito, a contribuição da escola russa aplicada a problemas mal postos, tendo como figura de proa Andrey N. Tikhonov, abriu caminho para saltos qualitativos decisivos em prol da sua resolução. No caso dos CIPs, a ideia básica é achar a distribuição de coeficientes que minimize o funcional regularizado dito de Tikhonov, expresso em termos de uma distribuição genérica q da seguinte forma: supondo que se dispõe de uma estimativa razoável p_0 da distribuição real dos coeficientes, por exemplo, um valor médio esperado ou mais provável, esse funcional se exprime como a soma da distância⁽¹⁾ $dist(q, p_0)$ dessa avaliação inicial a uma dada distribuição de coeficientes q , multiplicada por um pequeno parâmetro ϵ não negativo, e da distância⁽¹⁾ entre os valores medidos e os da solução u_q da EDP se a distribuição de coeficientes fosse q , sendo as medições realizadas apenas numa pequena porção do domínio es-

pacial ou espacio-temporal.

Para fixar ideias, no caso da deformação u da barra descrita no parágrafo anterior, o **funcional regularizado de Tikhonov** (conforme referência 5) se escreve:

$$J_\epsilon(q) = \epsilon \text{dist}(q, p_0) + |u_q(L) - d|$$

Em suma, a resolução do problema consiste em encontrar a distribuição p tal que $J_\epsilon(p)$ não seja maior do que $J_\epsilon(q)$ para qualquer outra distribuição de coeficientes q fisicamente realista.

É importante observar ainda que, mesmo quando a equação diferencial subjacente é linear, um CIP é necessariamente um problema não linear. Isso se deve ao fato de que os coeficientes físicos presentes na equação que traduz o modelo matemático em estudo, sempre aparecem multiplicados pela solução da mesma ou por derivadas suas, e ambas funções precisam ser determinadas simultaneamente. Por essa razão, entre outras, a resolução de um CIP deve ser efetuada iterativamente – ou seja, passo a passo⁽²⁾ – por meio de algoritmos bem adaptados ao tipo de problema em pauta. Via de regra, a cada passo – ou iteração, no jargão especializado – um problema direto deve ser resolvido usando a aproximação atual dos coeficientes incógnitos, ou seja, aquela determinada no passo anterior. A eficácia da metodologia empregada para resolver um CIP fica assim diretamente condicionada à escolha de um método de confiabilidade comprovada para resolver a EDP que modela o fenômeno ou o processo em questão. Em outras palavras, o conjunto dos métodos numéricos para a resolução de EDPs está contido no bojo das metodologias de resolução de CIPs, o que torna estas últimas um tema bastante desafiador. Tal poderia ser a explicação para o fato de a comunidade científica dedicada à resolução de CIPs ser bem mais reduzida do que a que lida somente com técnicas numéricas para tratar os problemas diretos subjacentes, ou seja, as EDPs.

ALGORITMOS GLOBALMENTE CONVERGENTES

Processos iterativos precisam ser convergentes, isto é, devem conduzir à solução procurada ao cabo de um número razoável de iterações. Com esse fim, na continuidade da linha traçada pela supramencionada escola russa, cientistas continuam melhorando e estendendo os algoritmos de resolução iterati-

va de CIPs. Tal é o caso do Professor Michail Viktor Klivanov, da Universidade da Carolina do Norte em Charlotte e da Professora Larisa Beilina⁽³⁾, da Universidade Tecnológica de Chalmers em Gotemburgo, Suécia. Ambos desenvolveram há cerca de uma década o método da convergência global aproximada, original e eficaz, descrito na referência 4, complementando e aprimorando os princípios de resolução previamente estabelecidos na escola de Tikhonov. Ambos os cientistas acima nomeados vêm investindo na combinação do seu método com elementos finitos adaptativos, mediante estimações sucessivas de erro, técnica reconhecidamente de alta precisão para resolver EDPs.

APLICAÇÃO À DETECÇÃO DE OBJETOS NO SENTIDO AMPLO

A Professora Larisa Beilina é hoje destacada especialista na comunidade científica mundial dedicada à resolução de CIPs de grande porte. Na sua prática profissional recente tem concentrado seus esforços na detecção de objetos *lato sensu*, em amplo espectro de aplicações, cobrindo as áreas de defesa, médica e de processamento de imagens, entre outras. Atualmente grande parte dos trabalhos do seu grupo⁽⁴⁾ (conforme referência 2) é calcada na emissão de ondas elétricas sobre a região estudada, tal como um terreno possivelmente minado ou um órgão humano passível de estar afetado por um tumor maligno.

Demonstração do método da convergência global aproximada com elementos finitos adaptativos (caso acadêmico estudado na referência 3)

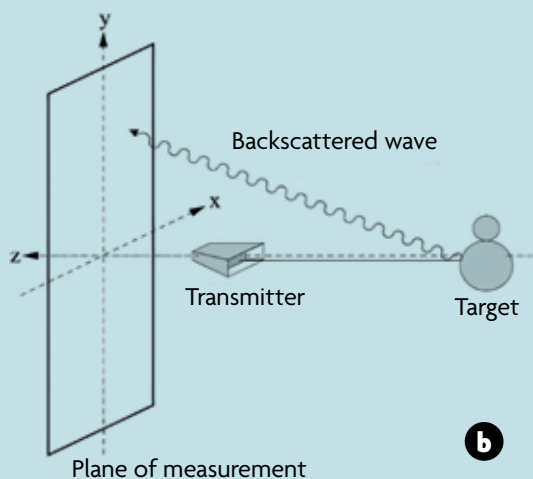
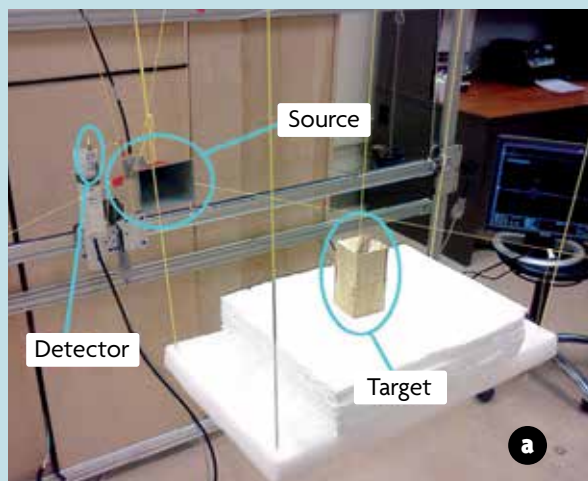


FIGURA 1

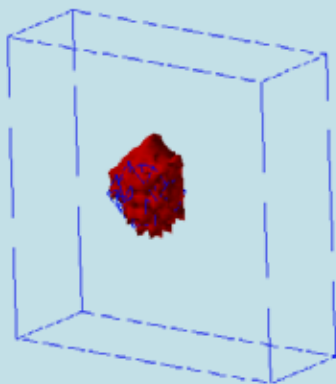


FIGURA 2

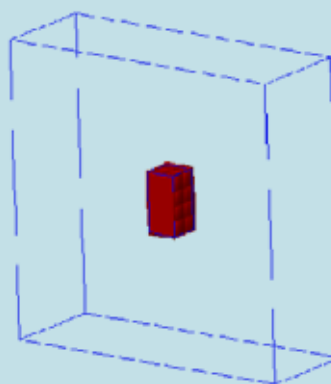


FIGURA 3

Neste caso, o sistema de EDPs que rege o processo de detecção são as equações de Maxwell do eletromagnetismo (conforme referência 1). Partindo da premissa de que a permeabilidade magnética das matérias e corpos presentes no domínio em análise é constante, esse CIP consiste em determinar a distribuição espacial da permissividade elétrica do compósito, dado que, supostamente, ela varia fortemente do meio envolvente a um objeto envolvido. Uma vez processado, tal contraste permite detectar objetos *lato sensu*, para que sejam destruídos, monitorados ou tratados na sequência, conforme o caso.

Poderíamos demonstrar a força do método da convergência global aproximada com elementos finitos adaptativos por meio de vários exemplos. Contudo, por conta dos limites deste texto, o fazemos aqui tão somente através de um caso acadêmico estudado na referência 3. Trata-se de reconstruir a imagem de uma peça prismática de madeira envolvida pelo ar, tomada como objeto alvo. O esquema utilizado para a coleta de dados de campo limitados em tempo e espaço é apresentado na **figura 1**: como se vê em (a), uma fonte de ondas elétricas, colocada não muito longe do prisma de madeira, transmite pulsos elétricos gerados por um emissor. Um osciloscópio Tektronix registra a onda elétrica retrorefletida (*backscattered wave*) em alguns pontos de um plano situado a 80 cm atrás do objeto alvo, como ilustrado no croquis (b), durante dez nanossegundos. Uma vez digitalizados esses dados de entrada em termos de espaço e tempo, ato contínuo uma forma um tanto irregular do objeto alvo é determinada pelo algoritmo da convergência global aproximada, com o uso de uma malha inicial pouco refinada do domínio da busca, cujos contornos se apresentam em cor azul. Porém, nota-se na **figura 2** que a localização do objeto alvo já está bastante correta nessa etapa. Após alguns ajustes adaptativos da malha de elementos finitos, chega-se à reconstrução fina da imagem do prisma e sua localização, exibidas na **figura 3**.

Esquemas semelhantes podem ser usados para detectar de forma precisa vários outros tipos de objetos, tais como tumores malignos ou minas terrestres.

CONCLUSÃO

Esforçamo-nos por apresentar neste artigo um breve apanhado do que se faz de avançado contemporaneamente, em matéria de detecção

pela via computacional de objetos no sentido amplo do termo. O emprego das ferramentas desenvolvidas com esse fim requer pouco investimento em equipamentos, e pode dar respostas muito prontas e precisas em um sem número de aplicações, notadamente no campo da defesa. É este o ponto que nos parece adequar plenamente a abordagem do tema em pauta a este qualificado veículo de informação. ■

NOTAS

- (1) Essa distância é medida em uma certa norma, vale dizer, em um sentido matemático específico e natural.
- (2) Esse procedimento enseja a redução gradual do valor do parâmetro ϵ , para que se torne desprezível ao término do processo iterativo, eliminando assim toda influência na solução final da avaliação inicial P_0 , em geral errônea.
- (3) O autor é muito grato à Professora Larisa Beilina do Depto. de Matemática e ao Depto. de Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Chalmers de Gotemburgo, Suécia, pela contribuição material a este artigo.
- (4) Desde meados de 2016 o autor colabora cientificamente com a Professora Larisa Beilina no estudo de metodologias para o tratamento numérico confiável das equações de Maxwell do eletromagnetismo (conforme referência 1), como aporte à melhoria de ferramentas computacionais desenvolvidas por seu grupo. No âmbito dessa parceria foi "opponent" (consultor de orientação) da tese especificada na referência 2 deste artigo.

REFERÊNCIAS

- (1) Beilina, L., Ruas, V., Convergence of Explicit P1 Finite Element Solutions to Maxwell's Equations. Em: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer International Publishing, p. 91-103, 2020.
- (2) Bondestam Malmberg, J., Efficient Adaptive Algorithms for an Electromagnetic Coefficient Inverse Problem, Tese de Doutorado, Universidade de Gotemburgo, Suécia, setembro de 2017.
- (3) Beilina, L., Thành, N. T., Klibanov, M. V., Malmberg, J. B., Globally convergent and adaptive finite element methods in imaging of buried objects from experimental backscattering radar measurements, Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, DOI 10.1016/j.cam.2014.11.055, 2014.
- (4) Beilina, L., Klibanov, M. V., Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems, Springer, New York, 2012.
- (5) Tikhonov, A. N., Traduzido do russo para o inglês em "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method", Soviet Mathematics. 4, p. 1035-1038, 1963.

* *Docteur d'état* em Análise Numérica, integrante do Grupo de Interesse em Ciência, Tecnologia, Engenharia, Matemática e Inovação (CTEMI) do Clube Naval